Concours National Commun - Session 2014

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I
Filière MP

À propos de l'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse. Extremums

Corrigé par M.TARQI [1]

Exercice

1. Pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, on a $(1-\sqrt{xy})^2-(1-x)(1-y)=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$, donc $(1-x)(1-y)\leq(1-\sqrt{xy})^2$.

2. Il est clair que f est continue sur $[0,1]^2\backslash]\{(1,1)\}$, comme rapport de deux fonctions continues. De plus l'inégalité précédente montre que $\forall(x,y)\in[0,1]^2\backslash]\{(1,1)\}$, $|F(x,y)|\leq xy(1-\sqrt{xy})$, donc
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}F(x,y)=0=F(1,1),$$
donc F est continue sur $[0,1]^2$.

3. $[0,1]^2$ étant un compact de $\mathbb{R}^2$, donc par théorème de continuité sur les compacts, F est bornée sur $[0,1]^2$ et atteint ses bornes.

4. On remarque que $\forall(x,y)\in[0,1]^2$, $F(x,y)\geq 0=F(1,1)$ donc $\inf\limits_{(x,y)\in[0,1]^2}F(x,y)=0$. De plus $\forall x\in[0,1]$, $F(x,1)=F(1,x)=F(x,0)=F(0,x)=0$, donc $\inf\limits_{(x,y)\in[0,1]^2}F(x,y)$ est atteint sur la frontière du carré $[0,1]^2$.

5. On voit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]0,1[^2$ comme rapport de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\forall(x,y)\in]0,1[^2$, on a :
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2}.$$
Puisque F est symétrique, alors
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{x(1-x)(1-2y+xy^2)}{(1-xy)^2}.$$

6. $(x_0,y_0)\in]0,1[^2$ est un point critique si et seulement si (x_0,y_0) vérifie le système
$$\begin{cases}1-2x+x^2y=0\\1-2y+xy^2=0\end{cases}$$
Ceci implique que $x_0=y_0$ et donc $1-2x_0+x_0^3=0$. Les racines de l'équation $1-2x+x^3=0$ sont 1, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, donc nécessairement $x_0=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. D'où l'unique point critique de F : $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

7. On obtient $F(x_0,y_0)=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$. D'autre part on sait que la borne supérieure de F sur $[0,1]^2$ existe et atteint, donc nécessairement $F(x_0,y_0)=\sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2}F(x,y)$.

1. Veuillez adresser toute remarque, correction ou suggestion à l'auteur : medtarqi@yahoo.fr

Problème

A props de l'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse

Première partie : Résultats préliminaires

1.1 On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série géométrique $\sum_{m\in\mathbb{N}} z^m$ converge et que $\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}$. Le rayon de convergence est 1.

1.2 On remarque que $\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \frac{1}{1-\beta e^{-it}}$. Donc si $|\beta| < 1$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\beta e^{-it}| < 1$, donc

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta e^{-it}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m e^{-imt}.$$

1.3 De même , on a $\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = -\frac{e^{it}}{\beta}\frac{1}{1-\beta^{-1}e^{it}}$. Par conséquent si $|\beta| > 1$, alors $|\beta^{-1}e^{it}| < 1$, et donc

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = -\frac{e^{it}}{\beta}\sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta^{-1}e^{it}\right)^m = -\frac{e^{it}}{\beta}\sum_{m=0}^{\infty} \beta^{-m}e^{imt}.$$

$$|\beta > 1$$

1.4 • Cas $|\beta| < 1$: D'après la définition, on a :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-\beta}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\beta^m e^{-imt}\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part la série de fonctions $\sum_{m=0}^{\infty}\beta^m e^{-imt}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$, puisque $\forall t \in [0, 2\pi]$, $|\beta^m e^{-imt}| \leq |\beta|^m$ et la série $\sum_{m=0}^{\infty}|\beta|^m$ converge. Donc on peut intégrer terme à terme :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\beta} = i\sum_{m=0}^{\infty}\beta^m\int_0^{2\pi} e^{-imt}\,\mathrm{d}t = 2i\pi.$$

• Cas $|\beta| > 1$: De la même façon on montre que la série de fonctions $\frac{-1}{\beta}\sum_{m\geq 0}\beta^{-m}e^{-i(m+1)t}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$, donc

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\beta} = i\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\beta^m e^{-imt}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\beta^{-m}\int_0^{2\pi} e^{-i(m+1)t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'où :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\beta} = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } |\beta| < 1 \\ 0 & \text{si } |\beta| > 1 \end{cases}$$

1.5 Montrons d'abord le résultat suivant : si z et z' sont deux nombres complexes tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$, avec $z \neq 0$, alors il existe $\alpha >$ tel que $z' = \alpha z$. En effet, l'égalité $|z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$ s'écrit encore $z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2|z||z'|$, d'où $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = |z||z'| = |zz'|$. Donc $z'\overline{z} = r \in \mathbb{R}_+$ et $z'\overline{z}z = z'|z|^2 = rz$, d'où $z' = \dfrac{r}{|z|^2}z$.
D'autre part, par l'inégalité triangulaire, on a $|\lambda v + \mu w| \leq |\lambda v| + |\mu v| = \lambda + \mu = 1 \ (*)$. Supposons maintenant que $|\lambda v + \mu w| = 1 = |\lambda v| + |\mu v|$, alors d'après ce qui précède il existe $\alpha > 0$ tel que $\mu w = \alpha\lambda v$.
Si on pose $v = e^{i\theta_1}$ et $w = e^{i\theta_2}$, l'égalité précédente montre que $e^{i(\theta_1-\theta_2)} \in \mathbb{R}$, donc $\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que $w = v$, ceci est absurde.
Finalement l'inégalité $(*)$ est stricte.

Deuxième partie : Deux résultats de localisation des racines d'un polynôme

2.1 Posons, pour chaque $k \in \{1, 2, ..., r\}$, $P = (X - z_k)^{\alpha_k}Q$. Donc

$$P' = \alpha_k(X - z_k)^{\alpha_k-1}Q + (X - z_k)^{\alpha_k}Q'.$$

On trouve alors

$$\frac{P'}{P} = \frac{\alpha_k}{X - \alpha_k} + \frac{Q'}{Q}.$$

Or z_k n'est pas une racine de Q, donc $\dfrac{Q'}{Q}$ n'admet pas z_k pour pôle et $\dfrac{\alpha_k}{X - \alpha_k}$ est la partie polaire de $\dfrac{P'}{P}$ relative à z_k. On reprend le même raisonnement mais cette fois avec la fraction $\dfrac{Q'}{Q}$.

Finalement si $P = a\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - z_k)^{\alpha_k}$, on trouve

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{X - z_k}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, ..., z_r\}$, $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{z - z_k}$.

2.2 Soit w une racine de P' qui n'est pas une racine de P.

2.2.1 L'égalité de la question 2.1 entraîne $0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k}{w - z_k}$. On multiplie ensuite chaque dénominateur par son conjugué, et on prend le conjugué de tout cela. On obtient l'égalité demandée :

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{\alpha_k(w - z_k)}{|w - z_k|} = 0.$$

2.2.2 Posons, pour chaque $k \in \{1, 2, ..., r\}$, $\lambda_k = \dfrac{\alpha_k}{|w - z_k|^2} > 0$ et $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r$. On obtient alors

$$w = \sum_{k=1}^{r}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)z_k.$$

Donc il suffit de prendre $\beta_k = \dfrac{\lambda_k}{\lambda}$.

2.3 Si w est une racine de P qui n'est pas une racine de P, le résultat est bien démontré dans la question 2.2.2. Le cas d'une racine multiple w est evident puisque w figure parmi les racines de P.

2.4

2.4.1 L'ensemble $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ étant fini, donc il est fermé et par conséquent $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
La fonction $z \mapsto \dfrac{P'(z)}{P(z)}$ est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ comme rapport de deux fonctions continues sur $\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, ..., z_n\}$.

2.4.2 D'après la question 2.1, on a :

$$\int_\gamma \frac{P(z)}{P'(z)}dz = \sum_{k=1}^{r} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_k}.$$

En changeant le numérotage, on peut supposer $|z_1| < 1, ..., |z_s| < 1$ et $|z_{s+1}| > 1, ..., |z_r| > 1$. On obtient alors, en utilisant le résultat de la question 1.4,

$$\int_\gamma \frac{P(z)}{P'(z)}dz = \sum_{k=1}^{r} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{s} 2i\pi.$$

D'où $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{P(z)}{P'(z)}dz = s$; c'est nombre de racines de P dont le module est strictement inférieure à 1.

Troisième partie : Une condition suffisante d'unimodularité de zéros d'un polynôme auto-inverse

3.1 Notons $a_k = k - n$, $k \in \{0, ..., 2n\}$ les coefficients du polynôme S_n, $k \in \{0, ..., 2n\}$, on a

$$\overline{a_{2n-k}} = 2n - k - n = n - k = a_k,$$

donc S_n est auto-inverse avec $\varepsilon = 1$.

3.2 Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré d et $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$.

3.2.1 Si P est auto-inverse de paramètre ε, alors $a_k = \varepsilon\overline{a_{d-k}}$, pour tout $k \in \{0, 1, ..., d\}$, en particulier $P(0) = \varepsilon\overline{a_d} \neq 0$ (le coefficient dominant est non nul).
On a aussi,

$$a_k = \varepsilon\overline{a_{d-k}} = \varepsilon^2\overline{\overline{a_{d-(d-k)}}} = \varepsilon a_k.$$

On obtient donc, pour $k = d$, $a_d = \varepsilon^2 a_d$, donc ε^2 et puis $|\varepsilon| = 1$.

3.2.2 Si P est auto-inverse de paramètre ε, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^{d} \overline{a_{d-k}} z^k \\ &= \varepsilon z^d \sum_{k=0}^{d} \overline{a_{d-k}} z^{k-d} = \varepsilon z^d \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit P un polynôme tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P(z) = \varepsilon z^d \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, alors on obtient l'égalité $\sum_{k=0}^{d} a_k z^k = \varepsilon \sum_{k=0}^{d} \overline{a_{d-k}} z^k$, comme $\mathbb{C}^*$ est infini, alors $\forall k \in \{0, 1, ..., d\}$, $a_k = \varepsilon \overline{a_{d-k}}$, donc P est auto-inverse de paramètre ε.

3.3 On peut vérifier facilement que $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$ et $\overline{PQ} = \overline{P}\overline{Q}$.

3.4

3.4.1 Supposons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ auto-inverse de paramètre ε. Notons b_k, $k \in \{0, 1, ..., d+1\}$ les coefficients de $(X-1)P$, on a :

$$(X-1)P = -a_0 + \sum_{k=1}^{d} (a_{k-1} - a_k) X^k + a_d X^{d+1}.$$

Donc $b_0 = a_0$, $b_k = a_{k-1} - a_k$, $k \in \{1, 2, ..., d\}$ et $b_{d+1} = a_d$, on a donc $b_0 = \varepsilon \overline{b_{d+1}}$, $b_k = a_{k-1} - a_k = \varepsilon(\overline{a_{d-k+1} - a_{d-k}}) = \varepsilon \overline{b_{d+1-k}}$ $k \in \{1, 2, ..., d\}$ et $b_{d+1} = a_d = \varepsilon \overline{a_0} = \varepsilon \overline{b_0}$.
Donc $(X-1)P$ est auto-inverse de paramètre ε.

3.4.2 On a $P_\mu(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mu^k z^k$ et $\forall k \in \{0, 1, ..., d\}$, $a_k \mu^k = \varepsilon \mu^d \overline{a_{d-k}} \overline{\mu^{d-k}}$ (car $\overline{\mu} = \frac{1}{\mu}$) donc P_μ est auto-inverse de paramètre $\varepsilon \mu^d$.

3.4.3 Posons $P = a \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{\alpha_k}$ où les racines z_k sont de module 1. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} z^d \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) &= \overline{a} z^d \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right)^{\alpha_k} \\ &= \overline{a} z^d \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_k}\right)^{\alpha_k} \\ &= \frac{\overline{a} z^d}{z^d \prod_{k=1}^{r} z^k} \prod_{k=1}^{r} (z_k - z)^{\alpha_k} \end{aligned}$$

Donc $P(z) = \varepsilon z^d \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ avec $\varepsilon = (-1)^d \frac{a \prod_{k=1}^{r} z^k}{\overline{a}}$. D'après 3.2.2, P est auto-inverse.

3.4.4 Le polynôme $X^2 - X - 1$ répond à la question.

3.5 Le polynôme $X^n \overline{Q}\left(\frac{1}{X}\right)$ est de degré $\leq n$, le polynôme $X^{d-n}Q$ est de degré d, donc $\deg R = d$.
D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\varepsilon z^d \overline{R}\left(\frac{1}{z}\right) = \varepsilon z^d \left(\frac{1}{z}\right)^{d-n} \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\varepsilon} \varepsilon z^d \left(\frac{1}{z}\right)^{n} Q(z) = \varepsilon z^n \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) + z^{d-n} Q(z) = R(z).$$

Donc R est auto-inverse.

3.6

3.6.1 Si $z \in \mathbb{U}$, on a $|Q_1(z)| = |z^{d-n}Q(z)| = |Q(z)|$ et $|Q_2(z)| = \left|\overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right)\right|$. Mais $\overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) = |\overline{Q}(\overline{z})| = |\overline{Q(z)}| = |Q(z)|$, donc $|Q_1(z)| = |Q_2(z)|$.

3.6.2 Supposons qu'il existe $\lambda \in [0,1[$ et $z \in \mathbb{U}$ tels que $Q_1(z) + \lambda Q_2(z) = 0$, donc $Q_1(z) = -\lambda Q_2(z)$ en prenant le module, on obtient $|\lambda| = 1$, ce qui est absurde.
Donc $\forall \lambda \in [0,1[, \forall z \in \mathbb{U}, Q_1(z) + \lambda Q_2(z) \neq 0$.

3.6.3 L'application $\lambda \mapsto \dfrac{Q_1'(z) + \lambda Q_2'(z)}{Q_1(z) + \lambda Q_2(z)}$ est bien définie et continue sur $[0,1[$, donc d'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, la fonction

$$\varphi : \lambda \mapsto \int_\gamma \frac{Q_1'(z) + \lambda Q_2'(z)}{Q_1(z) + \lambda Q_2(z)} dz$$

est continue sur $[0,1[$.
D'après la question 2.4.2, cette intégrale représente le nombre de racines du polynôme $Q_1 + \lambda Q_2$ sur $\mathbb{U}$, donc c'est un entier.

3.6.4 L'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs, comme $[0,1[$ est connexe par arcs, donc l'image est un connexe par arcs, donc l'application est constante sur $[0,1[$, car elle est à valeurs entières.

3.6.5 D'après ce qui précède $\forall \lambda \in [0,1[, \ \ \varphi(\lambda) = \varphi(0)$, c'est-à-dire R_λ et Q_1 ont le même nombre de racines dans $\mathbb{U}$. Q_1 et Q ont les mêmes racines, à l'exception de 0, les racines de Q sont de module <1, donc il est de même pour R_λ.

3.7

3.7.1 1 est un point adhérent à $[0,1[$, donc il existe une suite $(\mu)_m$ d'éléments de $[0,1[$ qui converge vers 1. La suite $(z_{k,\mu_m})_m$ étant bornée car $\forall m, \ \ |z_{k,\mu_m}| < 1$, donc on peut extraire une sous-suite $(z_{k,\lambda_m})_m$ de la suite $(z_{k,\mu_m})_m$ qui converge vers un z_k, comme $\forall m, \ \ |z_{k,\mu_m}| < 1$, alors on obtient, par passage à la limite, $|z_k| \leq 1$.

3.7.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $R_{\lambda_m}(z) = Q_1(z) + \lambda_m Q_2(z) = a_d \prod_{k=1}^{r}(z - z_{k,\lambda_m})$.
Lorsque m tend vers l'infini on obtient l'égalité

$$R(z) = Q_1(z) + Q_2(z) = a_d \prod_{k=1}^{r}(z - z_k).$$

et comme z est quelconque, l'égalité précédente est une égalité entre polynômes :

$$R = Q_1 + Q_2 = a_d \prod_{k=1}^{r}(X - z_k).$$

3.7.3 On remarque que si z est une racine de R, alors $z \neq 0$ ($R(0) \neq 0$) et $\frac{1}{\overline{z}}$ est aussi une racine de R. En effet, on a $R(z) = 0$ si et seulement si $z^{d-n}Q(z) + \varepsilon z^n \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ égalité qui s'écrit encore, en prenant le conjugué du tout,

$$\varepsilon \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^n \overline{Q}\left(\frac{1}{\frac{1}{\overline{z}}}\right) + \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^{d-n} Q\left(\frac{1}{\frac{1}{\overline{z}}}\right) = 0,$$

c'est-à-dire $R\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = 0$.

Comme les z_k sont des racines de R, alors il est de même pour les $\frac{1}{\overline{z_k}}$ et donc, en tenant compte de la question 3.7.2, $\forall k$, $\left|\frac{1}{\overline{z_k}}\right| \leq 1$ ce qui donc $|z_k| \geq 1$.

En conclusion, toutes les racines de R sont de module 1.

Quatrième partie : Quelques applications

4.1 Étude des racines du polynôme S_n

4.1.1 On a $X^{n+1} - 1 = (X-1)A_n$, donc les racines de A_n sont les racines $n+1$-ièmes de l'unité à l'exception de 1. Il sont simples et de module 1.

4.1.2 Soit w une racine de A_n', alors d'après la question 2.2.2, w est la barycentre des racines de A_n, et comme celles-ci sont de module 1, alors $|w| < 1$ (d'après la question 1.5).

4.1.3 L'ensemble des racines de B_n est formé par 0 et les racines de A_n', donc les racines de B_n, comme celles de A_n', sont toutes de modules strictement inférieure à 1.

4.1.4 On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{2n}(k-n)X^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k-n)X^k + \sum_{k=n+1}^{2n}(k-n)X^k \\ &= X^{2n-n}\sum_{l=1}^{n} lX^l + \sum_{k=0}^{n-1}(k-n)X^k \\ &= X^{2n-d}B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(k-n)X^k \end{aligned}$$

Or $X^n\overline{B_n}\left(\frac{1}{X}\right) = X^n\sum_{k=0}^{n-1}(k-n)\frac{1}{X}^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k-n)X^{n-k}$, d'où

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ S_n(z) = z^{2n-n}B_n(z) + z^n\overline{B}_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc on peut appliquer les résultats de la troisième partie, puisque toutes les conditions sont vérifiées, donc les racines de S_n sont toutes de modules 1.

4.2 Une condition nécessaire et suffisante d'unimodularité des zéros d'un polynôme

Si toutes les racines de P sont de modules 1, alors P est auto-inverse (la question 3.4.3), et on sait que les racines de P' dans ce cas sont de modules strictement inférieure à 1 (la question 2.2.2).

Inversement, supposons que P auto-inverse et que les racines de P' sont de modules strictement inférieure à 1. On a $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \ P(z) = \varepsilon z^d\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ ou encore $\overline{P}(z) = \overline{\varepsilon}z^dP\left(\frac{1}{z}\right)$, d'où par dérivation :

$$\begin{aligned} \overline{P}'(z) &= \overline{\varepsilon}dz^{d-1}P\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\varepsilon}z^d\frac{-1}{z^2}P'\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \overline{\varepsilon}dz^{d-1}P\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\varepsilon}z^{d-2}P'\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

D'où $\overline{P}'\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{\varepsilon} d \left(\frac{1}{z}\right)^{d-1} P(z) - \overline{\varepsilon}\left(\frac{1}{z}\right)^{d-2} P'(z)$ et par conséquent

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \;\; P(z) = z\frac{P'(z)}{d} + \frac{1}{\varepsilon} z^{d-1}\frac{\overline{P}'(z)}{d}.$$

Donc on peut appliquer le résultat de la partie 3 avec $Q = \dfrac{\overline{P}'(z)}{d}$: les racines de P sont toutes de module 1.

4.3 Des conditions suffisantes d'unimodularité plus maniables

4.3.1 Supposons $d = 2p$. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k + \frac{a_p}{2}z^p + \frac{a_p}{2}z^p + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k z^k \\
&= z^p\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k\left(\frac{1}{z}\right)^{p-k} + \frac{a_p}{2}\right) + z^p\left(\frac{a_p}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k z^{k-p}\right) \\
&= z^p\left(\sum_{k=1}^{p} a_{p-k}\left(\frac{1}{z}\right)^{k} + \frac{a_p}{2}\right) + z^p\left(\frac{a_p}{2} + \sum_{k=1}^{p} a_{p+k} z^{k}\right) \\
&= \varepsilon z^p\left(\sum_{k=1}^{p} \overline{a_{p+k}}\left(\frac{1}{z}\right)^{k} + \varepsilon\frac{\overline{a_p}}{2}\right) + z^p Q(z) \\
&= \varepsilon z^p \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) + z^{2p-p}Q(z)
\end{aligned}$$

Donc pour conclure il suffit de montrer que les racines de Q sont toutes de module inférieure à 1. En effet, par l'absurde supposons que Q admet une racine z tel que $|z| > 1$, donc $\dfrac{a_p}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{p+k}z^p = 0$ et donc $a_d z^d = -\dfrac{a_p}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} a_{p+k}z^k$ ou encore $a_d = -\dfrac{a_p}{2z^d} - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} a_{p+k}\left(\frac{1}{z}\right)^{d-k}$, puis, par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|a_d| < \frac{|a_p|}{2} + \sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}| \;\; (**).$$

D'autre part, on a par hypothèse,

$$|a_d| \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k| = \frac{|a_p|}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}|a_k| + \frac{1}{2}\sum_{k=p+1}^{d-1}|a_k| = \frac{|a_p|}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}|a_k| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}|$$

Mais $a_k = \varepsilon\overline{a_{2p-k}}$ pour tout k. Donc l'inégalité précédente devient

$$|a_d| \geq \frac{|a_p|}{2} + \sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}|$$

Cette inégalité est en contradiction avec $(**)$.
En conclusion, les racines de Q sont toutes de module ≤ 1 et par conséquent celles de P sont de module 1.
Le même raisonnement se fait pour le cas de $d = 2p+1$.

4.3.2 D'abord on sait que $(X-1)P$ est auto-inverse (la question 3.4.1), de plus on a

$$(X-1)P = \sum_{k=0}^{d+1} b_k X^k = -a_0 + \sum_{k=1}^{d} (a_{k-1} - a_k) X^k + a_d X^{d+1}.$$

Comme $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} |b_k| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} |a_{k-1} - a_k| \leq |a_d|$, alors la condition de la question 4.3.1 est vérifie, donc les racines $(X-1)P$ sont toutes de module inférieure à 1, il est de même pour les racines du polynôme P.

4.3.3 Par continuité et compacité, il existe $\mu \in \mathbb{U}$ tel que

$$\inf_{\nu \in \mathbb{U}} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \nu a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \mu a_{k+1}|.$$

Puisque $|\mu| = 1$ alors si les racines de P_μ sont de module ≤ 1, il est de même pour les racines de P. D'après 4.3.2, il suffit de montrer le résultat pour le polynôme $(X-1)P_\mu$ qui est auto-inverse. On a

$$(X-1)P_\mu = \sum_{k=0}^{d+1} b_k X^k = -a_0 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k - \mu a_{k+1}) \mu^k X^k + a_d \mu^k X^{d+1}.$$

Donc le polynôme $(X-1)P_\mu$ vérifie la condition de 4.3.2, donc les racines de P_μ et par suite celles de P sont toutes de module ≤ 1.

• • • • • • • • • • •